| الأستاذ : علي الشريف . الخميسات | ❶ درس : الإ تصال و النهايات ❶ www.madariss.fr | دروس الدعم و التقوية قسم : الثانية باكالوريا ع.رياضية |
|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ✍ **التمرين رقم 1 :** أحسب النهايات التالية : | 17 | $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]=$ |
| 1 | $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}=$ | 18 | $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}+mx\right)=$ |
| 2 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x-1=$ | 19 | $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=$ |
| 3 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=$ | 20 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+5}-x}{\sqrt{x^2-x}}=$ |
| 4 | $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}=$ | 21 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{(1-x)^2}=$ |
| 5 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$ | 22 | $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x\langle-2}}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=$ |
| 6 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\|x\|}{x^2-\|x\|}=$ | 23 | $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=$ |
| 7 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{\|x-1\|}=$ | 24 | $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x}=$ |
| 8 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{7x}=$ | 25 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+1}=$ |
| 9 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan(x)}=$ | 26 | $\lim\limits_{x\to 0}x^2.\sin\dfrac{1}{x}=$ |
| 10 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)+\cos(2x)}{\cos(3x)+3\cos(4x)}=$ | 27 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+x}=$ |
| 11 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan(x)+\sin(x)}{x}=$ | 28 | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\cos x}{2+x}=$ |
| 12 | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos(x)}{1-\sqrt{2}\sin(x)}=$ | 29 | $\lim\limits_{x\to 0}x.\sin(x).\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ |
| 13 | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2(2x)}{1+\sin(3x)}=$ | 30 | $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x^2-5x}{x^2+4x+3}=$ |
| 14 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}=$ | 31 | $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}=$ |
| 15 | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}=$ | 32 | $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-2x^2-x+6}{x^2-2x-8}=$ |
| 16 | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(2x)}=$ | 33 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-1}{x^2-4x+5}=$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **تابع التمرين رقم 1 :**<br>أ حسب النهايات التالية : | 49 | $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(x)}{\mathrm{Arc}\tan(\sqrt{x})}=$ |
| 34 | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=$ | 50 | $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)=$ |
| 35 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2-1}-2x}=$ | 51 | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{Arc}\sin(x)-1}{x^2-1}=$ |
| 36 | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=$ | 52 | $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(x)-\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}}=$ |
| 37 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3-x}-\sqrt[3]{x^3+2x}}{x}=$ | 53 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x-1}\right)=$ |
| 38 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$ | 54 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^3}}{3\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}=$ |
| 39 | $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$ | 55 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x-1=$ |
| 40 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt{x+1}}=$ | 56 | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+1}}=$ |
| 41 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}.\sqrt[12]{x}=$ | 57 | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[6]{x}}=$ |
| 42 | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}}=$ | 58 | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2\mathrm{Arc}\tan(x))}{\tan(2\mathrm{Arc}\sin(x))}=$ |
| 43 | $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x^2-4x+8}}{x-2}=$ | 59 | $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{Arc}\sin\sqrt{x}}{\mathrm{Arc}\sin\sqrt[3]{x}}=$ |
| 44 | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(2x^2-x)}{x}=$ | 60 | $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\mathrm{Arc}\sin(x)-\frac{\pi}{2}}{1-x^2}=$ |
| 45 | $\lim\limits_{x\to-\infty}x.\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ | | |
| 46 | $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}.x^2+x-1}{x^2+1}\right)=$ | 61 | $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\frac{\pi}{2}}{\mathrm{Arc}\sin(3x^2-4x^3)}=$ |
| 47 | $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(\sin(x))}{x.\cos(x)}=$ | | |
| 48 | $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(\sqrt{x}-1)}{x-1}=$ | 62 | $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}=$ |

**التمرين رقم 2 :**

أدرس آ تصال الدالة f في كل حالة عند $x_0$ .

1) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}.\sqrt{|x|} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ ; $x_0 = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} \; ; x \in ]1,+\infty[ \\ f(x) = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} \; ; x \in ]-\infty,1[ \\ f(1) = 2 \end{cases}$ ; $x_0 = 1$

**التمرين رقم 3 :**

أ حسب الأعداد الحقيقية a و b و c لكي تكون الدالة f متصلة في $x_0$ .

1) $\begin{cases} f(x) = x-1 \; ; (x\langle 1) \\ f(x) = 2-a.x^2 \; (x\rangle 1) \\ f(1) = b \end{cases}$ $(x_0 = 1)$

2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-x-a}{|x+1|-1} \; (x\langle 0) \\ f(x) = \dfrac{b(x+2)}{x-1} \; (x\rangle 0) \\ f(0) = c \end{cases}$ $(x_0 = 0)$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+ax+3}{x-3} \; (x\langle 3) \\ f(x) = \dfrac{bx+c}{x^2-3x} \; (x\rangle 3) \\ f(3) = 2 \end{cases}$ $(x_0 = 3)$

**التمرين رقم 4 :**

أ درس التمديد بالإ تصال للدوال التالية عند $x_0$ .

1) $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$ ; $x_0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$ ; $x_0 = \dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{1+3x}{x^2+x}$ ; $x_0 = 0$

**التمرين رقم 5 :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5}-5}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x^2+5x+23}-9}$$

و ليكن D حيز تعريفها .

1) بين أ ن لكل x من D :

$$f(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\dfrac{4x+13}{\sqrt{4x^2+5x+23}+7}}$$

2) آ ستنتج أ ن : $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{77}{189}$ .

**التمرين رقم 6 :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x.\sin\left(\dfrac{2}{x}\right) \; ; (x \neq 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) بين أ ن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ .

2) بين أ ن الدالة متصلة على IR .

**التمرين رقم 7 :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1) ليكن n عنصرا من Z, حدد تعبيرا لـ f(x) من أ جل x ينتمي إ لى المجال $[n-1;n[$ و من أ جل ينتمي إ لى المجال $[n\,;n+1[$ .

2) بين أ ن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = n$ حيث $n \in Z$ .

3) أ درس آ تصال الدالة على IR .

**التمرين رقم 8 :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $IR^*$ بما يلي :

$$f(x)=E\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) هل f تقبل نهاية عند 0 .

2) أ – حدد $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^-} f(x)$ حيث $k\in Z^*$

ب - أ درس آتصال f عند $\frac{1}{k}$.

**التمرين رقم 9:**

نعتبر الدالة : $f(x)=E(x^2)-x.(E(x))^2$

1) أ درس آ تصال الدالة f عند $\sqrt{2}$ و -1 .

2) حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

**التمرين رقم 10:**

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

1) أ درس آ تصال الدالة f عند 3 ثم عند 2.

**التمرين رقم 11:**

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة :

1) $f(x)=x^2-1$ ; $I=[-3,-1]$

2) $f(x)=x^2-x+1$ ; $I=[1,7]$

3) $f(x)=\frac{x-3}{2x+7}$ ; $I=]0,+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{1-3x}$ ; $I=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$

**التمرين رقم 12:**

بين أ ن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

1) $x^4+2x-3=0$ ; $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

2) $x^3+2=0$ ; $I=[-2;-1]$

3) $\sin x+\frac{1}{3}=0$ ; $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$

**التمرين رقم 13:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب :

$$f(x)=\frac{x^3}{2+x^3}$$

1) حدد صورة المجال $[0;+\infty[$ بالدالة f.

2) بين أ ن لكل عدد حقيقي λ من المجال $[0;1[$ , المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حل وحيد في المجال $[0;+\infty[$

**التمرين رقم 14:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ ب :

$$f(x)=2\cos(x)-\cos(2x)$$

1) أ درس تغيرات الدالةf ثم أ نشئ منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

2) لتكن F قصور الدالة f على المجال $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

أ - حددE صورة المجال $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ بالدالة F .

ب – بين أ ن $\forall\lambda\in E$ المعادلة $F(x)=\lambda$ تقبل حل وحيد في المجال $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ .

**التمرين رقم 15:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $f(x)=x^8-2x^4$

1) أ درس تغيرات الدالة f .

2) أ نشئ $(\xi_f)$ في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

3) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,1]$ .

أ - بين أ ن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده .

ب- أ حسب $g^{-1}(x)$ لكلx من J

ج- أ نشئ المنحنى $(\xi_{g^{-1}})$ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

4) بين أ ن المعادلة $x^8-2.x^4-x-1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0,1]$ .

سر التقدم هو أن تبدأ . سر البدء أن توزع مهماتك المتشعبة إلى مهمات صغيرة محددة وأن تبدأ بأولاها.
Mark Twain, American

cherifalix@hotmail.com GSM : 064865556

## التمرين رقم 16:

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\sin^2(x)-2\sin(x)$$

1) بين أن القصور $g$ للدالة $f$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ تقابل من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ نحو مجال $I$ يجب تحديده .

2) أحسب $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من $I$ .

3) بين أن القصور $h$ للدالة $f$ على المجال $\left[\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$ ، تقابل من $\left[\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$ نحو مجال $J$ يتم تحديده .

4) أحسب $h^{-1}(x)$ لكل من .

---

## التمرين رقم 17:

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على IR بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) ; \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أدرس آتصال الدالة $f$ عند $0$ .

2) أ – أدرس زوجية الدالة $f$ .

ب - أدرس رتابة الدالة $f$ على +IR ثم آستنتج رتابتها على IR. ( دون آستعمال الدالة المشتقة )

3) بين أن $f$ تقابل من $f$ نحو مجال $J$ يتم تحديده .

4) حدد الدالة العكسية $f^{-1}$.

5) آستنتج تعبيرا مبسطا لـ $f(x)$ .

---

## التمرين رقم 18:

بسط التعابير التالية :

$$A=\frac{\sqrt[3]{9}.\sqrt{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27\sqrt{6}}} \ , \ B=\frac{\sqrt[15]{3}.\sqrt[3]{9}.\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt[4]{27}.\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$C=\frac{\sqrt{4}.\sqrt{8}.\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} \ , \ D=\frac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

## التمرين رقم 19:

بسط التعابير التالية :

$$\cos(2\operatorname{Arccos}(x)) \ , \ \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)-\frac{x}{2}$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \ , \ \cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(x)\right)$$

---

## التمرين رقم 20:

أ ثبت المتساويات التالية :

1) $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

2) $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$

3) $\forall\ x\in[0;1]: \operatorname{Arccos}(x)+\operatorname{Arcsin}(x)=\frac{\pi}{2}$

4) $\forall\ x\in IR^{*+}\ : \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

5) $\operatorname{Arctan}(x+1)-\operatorname{Arctan}(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$

$\forall\ x\in IR^{*-}$

6) $\forall\ x\in[0;1]: \operatorname{Arcsin}(x)+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}$

7) $\forall\ x\in\ ]0;1[\ : \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

8) $\forall\ x\in[0;1]: \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x+1)$

---

## التمرين رقم 21:

حل في IR المعادلات التالية :

1) $\sqrt[3]{x^2}-5.\sqrt[3]{x}+6=0$

2) $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

3) $x^{\frac{2}{5}}-5x^{\frac{1}{5}}+6=0$

4) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2.\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{1-x^2}$

5) $\sqrt[3]{(x+1)}-\sqrt[3]{(1-x)}=\sqrt[6]{1-x^2}$

6) $(\operatorname{Arctan}(x))^2-\left(\frac{\pi+1}{2}\right).\operatorname{Arctan}(x)+\frac{\pi}{4}=0$

7) $\frac{1}{2}\pi-2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=\operatorname{Arcsin}(x)$

cherifalix@hotmail.com GSM : 064865556